FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DE RONDÔNIA - UNIR
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA - DME
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA
***CAMPUS* DE JI-PARANÁ-RO**

ALEXANDRO VICENTE DUTRA

HISTÓRIA E CURIOSIDADES DOS NÚMEROS PI, NÚMERO DE OURO E DO NÚMERO DE EULER

Ji-Paraná – RO
Dezembro de 2017

FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DE RONDÔNIA - UNIR
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA - DME
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA
***CAMPUS* DE JI-PARANÁ-RO**

ALEXANDRO VICENTE DUTRA

HISTÓRIA E CURIOSIDADES DOS NÚMEROS PI, NÚMERO DE OURO E DO NÚMERO DE EULER

Trabalho de Conclusão de Curso submetido ao Departamento de Matemática e Estatística, da Universidade Federal de Rondônia, Campus de Ji-Paraná, como parte dos requisitos para obtenção do título de Licenciado em Matemática, sob a orientação do. Prof. Me. Marcio Costa Araújo Filho.

Ji-Paraná – RO
Dezembro de 2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

Fundação Universidade Federal de Rondônia

Gerada automaticamente mediante informações fornecidas pelo(a) autor(a)

D978h Dutra, Alexandro.

HISTÓRIA E CURIOSIDADES DOS NÚMEROS PI, NÚMERO DE OURO E DO NÚMERO DE EULER / Alexandro Dutra. -- Ji-Paraná, RO, 2017.

37 f.

Orientador(a): Prof. Me. Marcio Costa Araújo Filho

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Fundação Universidade Federal de Rondônia

1.Número PI. 2.Número de ouro. 3.Número de Euler. I. Filho, Marcio Costa Araújo. II. Título.

CDU 51

Bibliotecário(a) Marlene da Silva Modesto Deguchi CRB 11/601

ALEXANDRO VICENTE DUTRA

HISTÓRIA E CURIOSIDADES DOS NÚMEROS PI, NÚMERO DE OURO E DO NÚMERO DE EULER

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi julgado adequado como parte dos requisitos para obtenção do título de Licenciada em Matemática e teve o parecer final como **APROVADO**, no dia 19 de dezembro de 2017, pelo Departamento de Matemática e Estatística (DME), da Universidade Federal de Rondônia, Campus de Ji-Paraná

Banca Examinadora:

Prof. Me. Marcio Costa de Araújo Filho
(Orientador/Presidente da banca)

Prof. Dr. Carlos Alberto Almendras Montero
(1º Membro – DME/UNIR)

Profa. Dr. Marlos Gomes de Albuquerque
(2º Membro – DME/UNIR)

Ji-Paraná – RO, 19 de dezembro de 2017.

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho a minha família: esposa Ozineia Silva Dutra e filha Thauany Cristina Silva Dutra, pela paciência e compreensão nos momentos de dificuldades e por suportarem o estresse a minha ausência no decorrer dos anos. Aos meus professores e amigos do curso, pois juntos adquirimos novos conhecimentos e grandes aprendizados.

AGRADECIMENTOS

Agradeço,

Primeiramente ao meu grande e poderoso Deus por propiciar saúde, sabedoria e condições para que assim eu chegasse até este momento tão esperado.

Ao meu orientador, Professor Me. Marcio Costa Araújo Filho, que aceitou me orientar e que foi paciente e compreensível, me auxiliando na elaboração e conclusão deste trabalho. Tem a minha gratidão e o meu respeito e consideração!

À minha família, esposa Ozineia Silva Dutra e minha querida filha Thauany Cristina Silva Dutra, sou grato por me compreenderem e apoiarem nessa jornada, as amo intensamente.

Aos meus colegas de turma do curso de Licenciatura em Matemática, enfatizo Marcos Antonio Pereira, Valdinei Fragoso, Vanessa Silva, Elane Lopes: obrigado pela contribuição, companhia e amizade.

A todos os professores do Departamento de Matemática e Estatística – DME da Universidade Federal de Rondônia campus de Ji-Paraná, e aos demais pertencente à instituição, principalmente, àqueles que direta ou indiretamente contribuíram para a minha formação, em destaque os Prof. Me. Carlos Alberto Almendras Montero e Prof. Dr. Marlos Gomes de Albuquerque, por compor a minha banca de defesa deste trabalho e compartilhar suas experiências a fim de contribuir com este trabalho.

E por fim, a todos que contribuíram com a minha formação acadêmica, muito obrigado, e que as bênçãos do Senhor Deus esteja sobre a vida de todos vocês!

Bendize, ó minha alma, ao Senhor, e tudo o que há em mim bendiga ao seu santo nome. Bendize, ó minha alma, ao Senhor, e não te esqueças de nem um só de seus benefícios. Ele é quem perdoa todas as tuas iniquidades; quem sara todas as tuas enfermidades; quem da cova redime a tua vida e te coroa de graça e misericórdia;
quem farta de bens a tua velhice, de sorte que a tua mocidade se renova como a da águia. O Senhor faz justiça e julga a todos os oprimidos. Manifestou os seus caminhos a Moisés e os seus feitos aos filhos de Israel. O Senhor é misericordioso e compassivo; longânimo e assaz benigno. Não repreende perpetuamente, nem conserva para sempre a sua ira. Não nos trata segundo os nossos pecados, nem nos retribui consoante as nossas iniquidades. Pois quanto o céu se alteia acima da terra, assim é grande a sua misericórdia para com os que o temem. Quanto dista o Oriente do Ocidente, assim afasta de nós as nossas transgressões. Como um pai se compadece de seus filhos, assim o Senhor se compadece dos que o temem. Pois ele conhece a nossa estrutura e sabe que somos pó. Quanto ao homem, os seus dias são como a relva; como a flor do campo, assim ele floresce; pois, soprando nela o vento, desaparece; e não conhecerá daí em diante, o seu lugar. Mas a misericórdia do Senhor é de eternidade a eternidade, sobre os que o temem, e a sua justiça, sobre os filhos dos filhos, para com os que guardam a sua aliança e para com os que se lembram dos seus preceitos e os cumprem. Nos céus, estabeleceu o Senhor o seu trono, e o seu reino domina sobre tudo. Bendizei ao Senhor, todos os seus anjos, valorosos em poder, que executais as suas ordens e lhe obedeceis à palavra. Bendizei ao Senhor, todos os seus exércitos, vós, ministros seus, que fazeis a sua vontade. Bendizei ao Senhor, vós, todas as suas obras, em todos os lugares do seu domínio. Bendize, ó minha alma, ao Senhor.

Salmos 103

RESUMO

O presente trabalho de conclusão de curso teve por propósito realizar um estudo bibliográfico e qualitativo referente aos fatos históricos na construção de conceitos matemáticos relacionados a alguns números irracionais que são muito utilizados na Matemática. A escolha por estudar esses fatos históricos se deve ao fato de a maior parte dos conhecimentos matemáticos existentes atualmente terem sido desenvolvidos por vários matemáticos e em momentos distintos da história da humanidade, sendo que muitas das vezes estes matemáticos investigaram o mesmo objeto em diferentes localidades. A presente pesquisa, de conclusão de curso, pautou-se num estudo de caráter bibliográfico a respeito dos números PI (π), número de ouro ($\boldsymbol{\Phi}$) e o número de Euler (e). A fim de facilitar o entendimento também foi colocado em pauta um breve estudo referente ao conjunto dos números reais e sequências e séries dos números reais, mencionado as propriedades, definições, algumas aplicações e exemplos. O principal objetivo deste trabalho é apresentar os principais fatores históricos, as definições e propriedades relacionadas aos números irracionais π, Φ e e. Além disso, mostrar pelo menos um método para as aproximações desses números. Esses números são inseridos muitas vezes em livros ou nas aulas dos professores de Matemática sem nenhuma contextualização histórica, mas neste trabalho foi possível constatar que eles foram estudados por diversos matemáticos no decorrer do tempo e, por isso, existem atualmente muitas curiosidades e propriedades a respeito deles. Além disso, observa-se que existem diferentes maneiras de se encontrar aproximações para esses números irracionais.

Palavras-chave: Número PI, Número de ouro, Número de Euler.

Sumário

INTRODUÇÃO

Este Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) traz um estudo a respeito dos números PI, número de ouro e número de Euler com ênfase aos fatores históricos relacionados a eles. Normalmente na Educação Básica os educadores não mencionam os fatores históricos da Matemática isto é, aplicam apenas o conteúdo em si. Muitos desses educadores utilizam a metodologia tradicional no Ensino de Matemática. Normalmente consideram a simples repetição mecânica de atividades e exercícios para frisar conceitos, assim, não enfatizam que os conhecimentos matemáticos vêm sendo construídos ao longo dos anos desde a antiguidade.

No Ensino Superior, em especial no curso de Licenciatura em Matemática, os docentes de algumas disciplinas tratam a Matemática de forma totalmente diferente, por exemplo; a disciplina de história da Matemática, é fundamental para uma boa formação do acadêmico, visto que, ao estudá-la conseguimos observar a importância de conhecermos um pouco da evolução da Matemática, e através dela é possível observarmos que não chegamos aos conhecimentos matemáticos por mero acaso, mas têm todo um desenvolvimento dos conceitos e teorias existentes, muitas com a contribuição de vários matemáticos.

Deste modo, a pesquisa em questão trás alguns números que aparecem em muitos contextos matemáticos, no entanto, na maioria das vezes sem nenhuma explicação ou contextualização histórica, e até mesmo sem sua conceituação matemática, o que seria imprescindível para a compreensão do estudante, despertando também maior interesse no conteúdo. Esses números são: o número PI ($\boldsymbol{\pi}$), o número de ouro ϕ e o número de Euler ($\boldsymbol{e}$).

O número π é um número que aparece diversas vezes na Matemática, geralmente, apresentado como exemplo de um número irracional e aproximado em *3, 14*. Mas, fora isso, nada mais é dito a respeito desse número. Muitas vezes o π serve para simbolizar a Matemática, mas não se conhece a sua história nem mesmo suas propriedades.

Outro número irracional bem interessante, que aparece no estudo do Cálculo Diferencial e Integral, é o número de Euler, simbolizado por $\boldsymbol{e}$**.** Este número é assim denominado em homenagem ao matemático suíço Leonhard Paul Euler, além disso constitui-se como base para os logaritmos naturais. Ele também pode ser chamado de número de Napier, número neperiano, número exponencial, etc.

Ainda existe um número irracional notável e que surge como uma razão em várias construções e também na natureza, como por exemplo, nas pirâmides de Gizé e no Nautilus marinho, que é um molusco que possui uma concha de estrutura espiralada. Esse número, representado pela letra Φ (phi), é chamado de número de ouro e é associado à beleza, também é conhecido como proporção divina.

Embora pouco apresentado no Ensino Básico, atualmente existem diversos estudos explorando a história, definições e propriedades dos números PI, número de Euller e do número de ouro.

O número π pode ser definido através de qualquer circunferência considerando simplesmente a razão de seu perímetro pelo seu diâmetro, o valor encontrado denomina π. Segundo Bastos e Silva (1999, p.46), "no espaço euclidiano existe ainda outra definição muito simples de π: a razão entre a área de um determinado círculo e o quadrado do seu raio é constante e igual a π".

Embora, atualmente, conhecemos muito bem o número π, na antiguidade não foi assim, foram necessários muitos estudos e muitos matemáticos se debruçarem para estudá-lo e assim conhecermos o mesmo da forma que conhecemos hoje. Sendo assim, surgem os seguintes questionamentos: qual a melhor definição para esse número irracional? Ele sempre foi conhecido como um número irracional? Quantas casas decimais do π existe publicada?

O número de ouro, Φ, é considerado na Matemática como o número da perfeição, conforme, Huntley (1985 p.36):

> Tomemos uma linha AB de comprimento 1, dividida em dois seguimentos pelo ponto C. Tomemos a e b como comprimentos de AC e CB, respectivamente. Se C é um ponto tal que 1/a assim como a/b, C é a "secção áurea" ou divisão áurea de AB.

E alguns matemáticos afirmaram que este número possui característica divina. Contador (2011, p. 19) nos afirma que:

> De qualquer forma ele foi descoberto, sua presença é marcante não só nos vegetais, mas nos seres vivos em geral, inclusive no homem, nos cristais, na Natureza e no próprio cosmos. Depois de sua descoberta, de forma brilhante, o homem, através da Álgebra, o equacionou e chegou numa proporção, à qual deu o nome de Proporção Áurea, e foi através, principalmente, da Geometria que pode vislumbrar as formas perfeitas que a ele estão relacionadas. Foi através dele que buscou o entendimento não só da estrutura da Natureza e do Universo, mas principalmente, do próprio homem.

Diante dos fatos surgem algumas inquietações: onde surgiu o número de ouro? Este número que leva este nome tão forte também é considerado irracional, se sim por quê? Qual é a relação deste número com a natureza? Por qual motivo alguns estudiosos o denominam como razão áurea? Qual a principal relevância deste número?

Já o número e é muito utilizado nos Cálculos Diferencial e Integral, todavia podemos encontrá-lo na base do logaritmo natural.

Normalmente, encontramos o número e nos cálculos Diferencial e Integral, mas Maor (2008, p.9) nos trás uma resalva:

> O número e era conhecido pelos matemáticos pelo, menos meio século antes da invenção do cálculo (ele já é mencionado na tradução inglesa de Edward Wright do trabalho de John Napier sobre logaritmos, publicado em 1618). Como foi isso possível? Uma explicação virtual é a de que o número e teria aparecido primeiro ligado a uma fórmula para o cálculo de juros compostos.

Mediante estas informações, pode-se questionar, qual é a forma mais adequada para apresentar este número? Quais os matemáticos que se dedicaram a estudá-lo? Quantas casas decimais são conhecidas atualmente? Qual relevância tem o número e nos estudos da Matemática?

Para a condução desta pesquisa, e consequentemente para a construção do texto, levando-se em conta os questionamentos levantados, é importante a inserção do seguinte questionamento que irá direcionar nosso trabalho: *Quais os fatores históricos e as possíveis definições e propriedades relacionadas aos números irracionais π, Φ e e?*

Sendo assim, levando-se em conta a pergunta norteadora, levantou-se o seguinte objetivo geral: apresentar os principais fatores históricos e as definições e propriedades relacionadas aos números irracionais π, Φ e e.

Diante dessa proposta surgiram os seguintes objetivos específicos: entender os conjuntos numéricos (em particular os números irracionais); compreender o conceito de sequências de números reais; compreender o conceito de séries de números reais;

apresentar as definições dos números $\boldsymbol{\pi}$, **ϕ** e ***e;*** apresentar os fatos históricos da descoberta e/ou origem dos números $\boldsymbol{\pi}$, **ϕ** e o ***e;*** mostrar aproximações dos números $\boldsymbol{\pi}$, **ϕ** e ***e.***

Em conformidade com os objetivos propostos neste trabalho e considerando nossa indagação, construímos nossas argumentações através da metodologia fundamentada em um estudo qualitativo com caráter exploratório e bibliográfico, utilizado livros, revistas, dissertações, teses, artigos, sites, entre outros possíveis em nosso trabalho.

Nesse sentido, a cerca da pesquisa bibliográfica, Gil (2008, p. 9 e 50) ressalta que:

> A pesquisa bibliográfica é desenvolvida a partir de material já elaborado, constituído principalmente de livros e artigos científicos. Embora em quase todos os estudos seja exigido algum tipo de trabalho desta natureza, há pesquisas desenvolvidas exclusivamente a partir de fontes bibliográficas. Parte dos estudos exploratórios pode ser definida como pesquisas bibliográficas, assim como certo número de pesquisas desenvolvidas a partir da técnica de análise de conteúdo.

Por outro lado, devemos levar em consideração também que as pesquisas em Matemática, em sua maioria, utilizam o raciocínio lógico dedutivo para desenvolver suas pesquisas, vejamos o que diz Gil (2008, p. 9 e 50) a esse respeito.

> O método dedutivo, de acordo com a acepção clássica, é o método que parte do geral e, a seguir, desce ao particular. Parte de princípios reconhecidos como verdadeiros e indiscutíveis e possibilita chegar a conclusões de maneira puramente formal, isto é, em virtude unicamente de sua lógica. E o método proposto pelos racionalistas (Descartes, Spinoza, Leibniz), segundo os quais só a razão é capaz de levar ao conhecimento verdadeiro, que decorre de princípios a priori evidentes e irrecusáveis. O protótipo do raciocínio dedutivo é o silogismo, que consiste numa construção lógica que, a partir de duas preposições chamadas premissas, retira uma terceira, nelas logicamente implicadas, denominada conclusão. Seja o exemplo:
> Todo homem é mortal, (premissa maior)
> Pedro é homem, (premissa menor)
> Logo, Pedro é mortal, (conclusão).

Desse modo, muitas propriedades em pesquisas matemáticas são apresentadas através de um raciocínio lógico e dedutivo a partir de conceitos e proposições já existentes. Isso será utilizado algumas vezes na presente pesquisa, principalmente com o objetivo de apresentar as propriedades matemáticas dos números em questão.

Com propósito de facilitar a compreensão dos números em questão, no primeiro capítulo, apresentam-se as definições e propriedades dos conjuntos numéricos, sequências e séries dos números reais.

O segundo capítulo está divido em três seções, a primeira seção é referente ao número PI, na segunda o número de ouro e, finalmente, na terceira será o número de Euler, levando-se em consideração alguns fatos históricos e curiosidades envolvendo esses números.

CAPÍTULO I – UM POUCO SOBRE CONJUNTOS NUMÉRICOS, SEQUÊNCIAS E SÉRIES DE NÚMEROS REAIS

Neste capítulo apresentam-se as definições dos conjuntos numéricos e sequências e séries dos números reais.

1.1 Conjuntos numéricos

Os conjuntos numéricos são muito importantes para a Matemática, sem os conjuntos numéricos muitas teorias matemáticas estariam comprometidas. Nessa seção, são apresentados os conjuntos numéricos e suas principais propriedades.

O conjunto dos números Naturais, representado pela letra $\mathbb{N}$, é composto pelos números que usamos para contar, ou seja, para descrever quantidades, sendo assim é descrito por

$$\mathbb{N} = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, \mathbf{5} \ldots\}.$$

Neste conjunto são definidas duas operações fundamentais sendo elas fechadas: a adição e a multiplicação, que apresentam as seguintes propriedades:

- Associativa para adição

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$$

para todos $a, b, c \in \mathbb{N}$.

- Comutativa da adição

$$a + b = b + a$$

para todos a, b $\in \mathbb{N}$.

- Elemento neutro da adição

$$a + 0 = a$$

para todo a $\in \mathbb{N}$.

- Associativa da multiplicação

$$(ab)c = a(bc)$$

para todos $a, b, c \in \mathbb{N}$.

- Comutativa da multiplicação

$$ab = ba$$

para todos $a, b \in \mathbb{N}$.

- Elemento neutro da multiplicação

$$a \cdot 1 = a$$

para todo $a \in \mathbb{N}$.

- Distributiva da multiplicação relativamente à adição

$$a(b + c) = ab + ac$$

para todos $a, b, c \in \mathbb{N}$.

Denomina-se conjunto dos números inteiros, e representa-se pelo símbolo $\mathbb{Z}$, o conjunto:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \ldots\}$$

No conjunto $\mathbb{Z}$ destacam-se três subconjuntos:

$\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, \cdot\cdot\cdot\} = \mathbb{N}$, denominado conjunto dos inteiros não negativos;

$\mathbb{Z}_- = \{0, -1, -2, -3, \cdot\cdot\cdot\}$, chamado conjunto dos inteiros não positivos;

$\mathbb{Z}^* = \{\cdot\cdot\cdot, -3, -2, -1, 1, 2, 3, \cdot\cdot\cdot\}$, denominado conjunto dos números inteiros não nulos.

No conjunto $\mathbb{Z}$, dos números inteiros, também são definidas as operações de adição e multiplicação, sendo que as propriedades válidas para $\mathbb{N}$ também são válidas para $\mathbb{Z}$ mais as simétricas.

Denomina-se conjunto dos números racionais e representa-se pelo símbolo $\mathbb{Q}$ o conjunto dos pares ordenados (a, b) ou frações $\frac{a}{b}$, sendo $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$ em que se aplica as definições:

1. Igualdade: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$
2. Adição: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$
3. Multiplicação: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

No interior do conjunto dos números racionais distinguimos três subconjuntos:

- $\mathbb{Q}_+$: Conjunto dos números racionais não negativos.
- $\mathbb{Q}_-$: Conjunto dos números racionais não positivos.
- $\mathbb{Q}^*$: Conjunto dos números racionais não nulos.

Todo número racional $\frac{a}{b}$ pode ser representado por um número decimal, mas existem dois casos distintos nessa representação: o número decimal pode obter uma quantidade finita de algarismo, isto é, uma decimal exata, exemplos:

$$\frac{25}{100} = 0{,}25;\ \frac{1}{2} = 1{,}5;\ \frac{2}{4} = 0{,}5;\ \frac{5}{1} = 5;\ \frac{2}{1000} = 0{,}003;$$

ou o número decimal com quantidade infinita de algarismo, mas com um período após a vírgula, é conhecido como uma dizima periódica, observe os exemplos:

$$\frac{2}{3} = 0{,}666666\cdots;\ \frac{31}{33} = 0{,}939393\cdots;\ \frac{44}{45} = 0{,}977777\cdots;\ \frac{35}{36} = 0{,}972222\ \cdots;$$

$$\frac{1}{3} = 0{,}333333\cdots.$$

As mesmas propriedades válidas para o conjunto dos números naturais são válidas também nos racionais, além delas existem outras, descritas abaixo.

Inverso ou simétrica para a multiplicação, para todo

$$\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \text{ e } \frac{a}{b} \neq 0, \text{ existe } \frac{b}{a} \in \mathbb{Q} \text{ tal que } \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$$

Consequentemente, pode-se definir em $\mathbb{Q}^*$, a operação de divisão, estabelecida por

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} \text{ para todo } \frac{a}{b} \text{ e } \frac{c}{d} \text{ em } \mathbb{Q}^*$$

Com o propósito de definir números irracionais de maneira explicita, segundo Ávila (2001) os números decimais que não são finitos nem periódicos são chamados de números irracionais e que para construí-los basta usar uma regra de formação que não permita o surgimento de período como nos exemplos:

$$0{,}28\ 2288\ 222888\ 22228888\cdots;\ 0{,}24\ 244\ 2444\ 24444\cdots;$$

$$0{,}15\ 1155\ 111555\ 11115555\cdots$$

Um dos exemplos de número irracional exposto por Ávila (2001) é o número PI com suas primeiras trinta casas decimais:

$$\pi = 3{,}14159265358979323846264338327 9\ldots$$

Essencialmente, dentro deste conjunto estão contidos, além do número PI (π), o número de Euler (e) e o número de ouro ($\boldsymbol{\Phi}$) sendo esses três números irracionais o foco principal deste trabalho.

A demonstração de que esses números são irracionais extrapola os objetivos propostos nesse trabalho, uma vez que requer conceitos matemáticos mais avançados. Mas, o leitor poderá encontrar mais detalhes em Oliveira (2013) sobre a irracionalidade de π e em Vasconcelos (2013) sobre o número a irracionalidade de e. Para o número de ouro, basta observar que é o quociente entre um irracional e um racional, por isso é irracional, como pode ser observado na seção 2.2.

Denomina-se conjunto dos números reais e representa-se com o símbolo $\mathbb{R}$ o conjunto formado por todos os números com representação decimal, ou seja, as decimais exatas ou periódicas que são números racionais, e as decimais não exatas e não periódicas que são os números irracionais. Desse modo, todo racional é número real, ou seja, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. E também os números irracionais estão contidos em $\mathbb{R}$, isto é, $I \subset \mathbb{R}$.

Existem também outros três subconjuntos contidos em $\mathbb{R}$:

- $\mathbb{R}_+ =$ Conjunto dos números reais não negativos;
- $\mathbb{R}_- =$ Conjunto dos números reais não positivos;
- $\mathbb{R}^*$ = Conjunto dos números reais não nulos.

A respeito da relação dos conjuntos numéricos com o desenvolvimento da Matemática, Ávila (2006, p.55), relata que:

> A matemática desenvolveu-se nos tempos modernos (isto é, a partir do século XVI), até o início do século XVII, mesmo sem qualquer fundamentação dos diferentes sistemas numéricos. Trabalhavam-se livremente com os números racionais e irracionais, desenvolvendo todas as suas propriedades, sem que houvesse uma teoria embasando esse desenvolvimento.

Mesmo conseguindo trabalhar livremente, sem embasamento matemático, os números racionais e irracionais foram importantes para o desenvolvimento da Matemática.

São apresentadas, a seguir, algumas propriedades fundamentais satisfeitas pelo conjunto dos números reais. Em $\mathbb{R}$ estão definidas duas operações chamadas adição e multiplicação denotadas por $+$ e $\cdot$ respectivamente e é fechado em relação as operações.

- A adição é comutativa e associativa, ou seja, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ tem-se

$$a + b = b + a; \qquad a + (b + c) = (a + \ b) + \ c;$$

- O produto é comutativo e associativo,

$$ab = ba; \qquad a(bc)c;$$

- O produto é distributivo em relação à adição

$$a(b + c) = ab + ac;$$

- Para a adição existe elemento neutro, o zero, tal que

$$0 + a = a, \forall a \in \mathbb{R};$$

- Qualquer que seja $a \in \mathbb{R}$ existe um simétrico $-a \in \mathbb{R}$ tal que,

$$-a \ \Rightarrow a + (-a) = 0$$

- Existe o elemento neutro para o produto, ou seja, existe $1 \in \mathbb{R}$ com,

$$1. a = a, \forall a;$$

- Para todo a $\neq 0$ em $\mathbb{R}$ há um inverso multiplicativo, representado por

$$a^{-1} = \frac{1}{a}, \text{ tal que } a. a^{-1} = 1 \ .$$

Essas propriedades dos números reais são importantes para a definição das sequências e séries de números reais. Além disso, serão úteis nos métodos que apresentados para aproximações dos números aqui estudados, que são números reais.

O surgimento dos números aconteceu parcialmente conforme as necessidades da humanidade em cada época, para elucidar Roque (2012) menciona que na baixa Mesopotâmia surgiu às primeiras formas Matemática decorrente a necessidade de registra as quantidades de rebanhos, insumos relacionados à sobrevivência, alem de organizar a sociedade.

1.2 Sequência e Séries de Números Reais

Nessa seção apresenta-se a definição e principais propriedades das sequências e séries de números reais. Uma vez que, as mesmas serão utilizadas para a obtenção de aproximações dos números apresentados nesta pesquisa.

Uma sequência numérica ou sucessão é uma função cujo domínio é conjunto dos números naturais e o contradomínio os reais. Segundo Lima (2008, p. 22).

> Uma sequência de números reais é uma função $x\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, que associa a cada número natural n um número real x_n, chamando o n-ésimo número de termo da sequência. Escreve-se $(x_1,\ x_2,\ \ldots, x_n, \ldots)$ ou $(x_n)n \in \mathbb{N}$, ou simplesmente (x_n), para indicar a sequência cujo n-ésimo termo é x_n.

Um exemplo simples de sequência é uma progressão geométrica de termos infinitos, que associa a casa número $n \in \mathbb{N}$ ao número real a^n. Se $a = 2$ teríamos a seguinte sequência de números reais $(a^n)_{n\in\mathbb{N}} = \ (1, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots.)$.

Um número real a é o limite da sequência (x_n) quando para todo número real $\varepsilon > 0$, dado arbitrariamente, pode-se encontrar $n_0\ \in\ \mathbb{N}$ de forma que todos os termos (x_n) com índice $n > n_0$ satisfaçam $|x_n - a| <\ \varepsilon$. O limite da sequência (x_n) é representado por $a = \lim x_n$.

Simbolicamente:

$$a = lim\, x_n\ . \equiv . \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0\ \in\ \mathbb{N}; n >\ n_0 \Rightarrow |\, x_n - a| <\ \varepsilon.$$

A expressão $a = \lim x_n$, também pode ser escrita

$$a = lim_{n\in\mathbb{N}}\, x_n,\ a = lim_{n\to\infty}\, x_n \text{ ou } x_n\ \to a$$

a expressão lê-se x_n tende para a ou “converge” para a se uma sequência possui limite diz-se que ela é convergente, caso contrário, ela é chamada de divergente.

Um exemplo de sequência convergente, é a sequência $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots.)$ cujo n-ésimo termo é $x_n = \frac{1}{n+1}$. Não é difícil notar que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$.

Além das sequências, outro conceito importante para este trabalho é o de séries numéricas. Ao se mencionar séries, em Matemática normalmente lembramo-nos do símbolo da somatória, mas o que é uma série? Conforme Lima (2008) “uma série é uma soma $s = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ com um número infinito de parcelas. Para que isto faça sentido, poremos $s = lim_{n\to\infty}(a_1 + \cdots a_n)$ como todo limite, este pode existir ou não. Por isso há séries convergentes e séries divergentes".

Uma série de termo geral a_n é representada pelo símbolo $\sum a_n$, isto é,

$$\sum a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots .$$

Considere a sequência a_n de números reais, a partir dela pode-se formar uma nova sequência (s_n) da seguinte maneira:

$$s_1 = a_1, s_2 = a_1 + a_2, \ldots, s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \ldots$$

e assim por adiante.

A sequência de elementos s_n é denominada reduzidas ou somas parciais da série $\sum a_n$. O elemento a_n é o *n*-ésimo termo ou termo geral da série.

Caso existir o limite $s = lim_{n\to\infty} s_n$ diz-se que a série $\sum a_n$ é convergente e

$$s = \sum a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \cdots$$

será chamada de soma da série. Se $\lim s_n$ não existir, diz-se que $\sum a_n$ é uma série divergente.

Observe por exemplo a série:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \cdots$$

cujo termo geral é: $a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

ela terá *n*-ésima soma parcial $s_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$.

Sendo assim, $\lim s_n = \lim_{n\to\infty}(1 - \frac{1}{n+1}) = 1$, isto é, $\sum \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

Logo, $\sum \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \cdots$ será convergente.

CAPÍTULO II – HISTÓRIA E CURIOSIDADES DO NÚMERO PI, NÚMERO DE OURO E DO NÚMERO DE EULER

Neste capítulo aborda-se um pouco sobre a história e curiosidades dos números PI, número de ouro e número de Euler.

2.1 O número PI

Conhecido da humanidade a mais de vinte séculos o PI é representado pela letra grega "π" e é obtido através da razão do comprimento de uma circunferência por seu diâmetro, como demonstrado graficamente na figura 1.

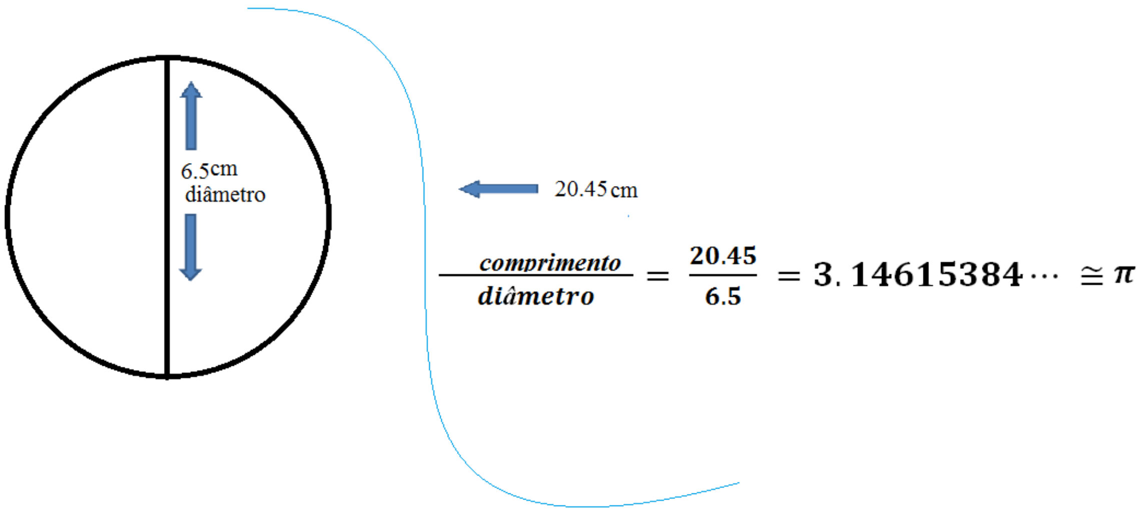

Figura1: Representação gráfica de aproximação de PI
Fonte: Elaborado pelo autor**.**

Existem obras confirmando a existência de PI ainda antes de Cristo. Segundo, Guzzo (2010),

> O número "PI" ficou conhecido da humanidade ainda antes de Cristo. É difícil dizer com precisão quando foi concebido, mas desde muito cedo, o homem percebeu que dividindo o comprimento de uma circunferência qualquer pelo seu diâmetro, resultava sempre um mesmo valor. A primeira menção deste fato é feita por volta do ano 2000 a.C. Isto é o que revela o papiro de Rhind, um documento egípcio descoberto em 1855. O símbolo atual que designa o número "PI" é a letra grega π, que foi utilizada pela primeira vez em 1707 por Willian Jones, mas só foi amplamente aceita quando usada por Euler em 1737.

Sendo assim, é compreendido que quando se divide o comprimento de uma circunferência qualquer pelo seu diâmetro, resulta sempre no mesmo quociente, isso já era conhecido desde dois mil anos antes de Cristo. Esse fato mostra que grande parte dos conhecimentos matemáticos são aperfeiçoados com o passar dos anos juntamente com o desenvolvimento da humanidade.

Por outro lado, o símbolo utilizado atualmente para representar PI, como já mencionamos é a letra grega π, essa utilização aconteceu tão somente há 310 anos, ou seja, em 1707 quando Wlliam Jones a utilizou, no entanto, só foi aceita quando usada por Leonhard Paul Euler trinta anos depois, em 1737.

Um dos acontecimentos históricos importantes e merecedor de destaque referente ao número PI é o ressaltado por Guzzo (2010) ao afirmar que Arquimedes foi o primeiro matemático a investigar o número π ainda no ano de 287 a.C.

A obra “Introdução à história da matemática” de Eves (2004) traz a contribuição histórica e relevante de vários matemáticos que trabalharam tentando calcular o valor de π, ele menciona que a primeira tentativa científica de calcular o valor de π foi de Arquimedes, vejamos o que diz Eves (2004, p. 141) a respeito disso:

> Para simplificar a questão, suponhamos que se tome um círculo de diâmetro unitário. Então o cumprimento da circunferência do círculo situa-se entre o perímetro de qualquer polígono inscrito e a de qualquer polígono regular circunscrito. Uma vez que é uma questão simples de calcular os perímetros dos hexágonos regulares inscrito e circunscrito, facilmente obtêm o limite para π...,a partir de um par dado de polígonos regulares inscrito e circunscrito como se pode obter o perímetro dos polígonos inscrito e circunscrito com o dobro de números de lados. Por aplicações sucessivas desse processo, podemos calcular o perímetro dos polígonos regulares inscrito e circunscrito de doze, vinte quatro, quarenta e oito e noventa e seis lados e, dessa forma obter o limite cada vez mais próximos de π. Foi isso, essencialmente, o que fez Arquimedes, chegando a conclusão que π esta entre 223/71 e 22/7 ou que, até a segunda casa decimal, π é dado pó 3,14. Esse trabalho se encontra num tratado de Arquimedes constituído de três proposições apenas e que se intitula *A medida de um círculo*. Esse tratado não chegou a nós em sua forma original e pode tratar-se apenas de um fragmento de uma discussão mais ampla. Considerando as limitações enormes do sistema de numeração da época, uma conclusão inevitável é que Arquimedes era um exímio calculista.

A metodologia utilizada foi baseada nos polígonos regulares inscritos e circunscritos em uma circunferência, utilizado por Arquimedes de Siracusa, e é conhecida como método clássico de cálculo de π. Esse método é muito cansativo e por isso, com o passar do tempo, alguns matemáticos se debruçaram em busca de casas decimais exatas de π e com essa busca surgiram outros métodos.

Além de ser matemático, Assis (2008) afirma que Arquimedes foi físico e inventor grego filho de Fídias (astrônomo grego), estudou na escola de Matemática de

Alexandria, na época era o centro cultural do mundo. O universo conspirava a favor dele, ele soube utilizar bem as oportunidades, e assim foi o primeiro a calcular a circunferência da terra.

O matemático Abraham Sharp foi outro matemático a se debruçar na tentativa de encontrar o valor de π. Ele foi professor colegial em Liverpool (Inglaterra), contador em Londres (Inglaterra), e possuía um amplo conhecimento de Matemática, teve o mérito d utilizar novas técnicas conseguidas através de séries de números reais, empregando a série de Gregory para $x = \sqrt{\frac{1}{3}}$, isso por volta de 1699, ele obteve setenta números para representação de casas decimais de π.

A princípio o feito de Abraham Sharp parece grande, porém essa quantidade tornou-se insignificante para demonstração de casas decimais para π pelo fato de dois matemáticos japoneses, Kasunori Miyoshi e Kazuhika Nakayama, terem calculado π exorbitantemente com 2 000 038 algarismos, todavia, é importante destacar que o tempo gasto foi de 137,38 horas, contudo foi indispensável utilizar-se de um computador FACOM M-200[1].

Nos parágrafos que se seguem utilizaremos a série de Gregory para obter aproximações de PI.

A série de Gregory, em sua forma geral, é dada por:

$$arctg\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots.$$

Utilizando a série de Gregory para $x = 1$ alcançamos:

$$arctg\, 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots.$$

Mas, sabemos da trigonometria que $arctg\, 1 = \frac{\pi}{4}$, sendo assim, nessa última igualdade, tem-se:

[1]Este era um computador muito grande da Fujitsu, e em 1978 foi tido como o computador topo na série FACOM M permitindo configurações de até 4 CPUs na época era o maior e mais rápido computador de uso geral do mundo.

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} \cdots$$

que é conhecida como série de Gregory-Leibniz. Ao multiplicar ambos os lados da igualdade anterior por quatro, tem-se:

$$\pi = 4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} - \frac{4}{11} + \ \ldots$$

logo,

$$\pi = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{4}{2n-1} = 4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} - \frac{4}{11} + \cdots$$

A cada vez que aumentamos o valor de n mais próxima essa série estará de π, ou seja, a série apresentada é convergente e converge para o número PI. É apresentada na tabela 1, diversas aproximações de π através da série obtida acima. Para obter o valor das aproximações exibidas na tabela foi utilizado o Software Excel, uma vez que os cálculos são bem longos.

Apesar de a aproximação ser demorada através dessa série, na construção da tabela foi possível observar que a partir de $n = 7$ a parte inteira de π se fixa em 3; a partir de $n = 25$ a primeira casa decimal de π, após a vírgula, se fixa em 1; a partir de $n = 627$ tem-se duas casas decimais exatas (como se vê na tabela 1) e para $n = 2445$ a aproximação de π, através da série de Gregory, apresenta três casas decimais exatas, ou seja, $\pi \cong 3{,}141999$.

Tabela 1 – Cálculo de aproximações de π

N	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{4}{2n-1} \cong \boldsymbol{\pi}$
1	4
5	3,339
10	3,041831
25	3,181576
50	3,121594
51	3,161198
100	3,131592
101	3,151493
626	3,143187
627	3,140000
1000	3,140592
10000	3,141492

Fonte: Elaborado pelo autor.

Para abrilhantar este trabalho, Struik (1997, p. 60) afirma que "na maior parte das matemáticas babilônicas, a melhor aproximação de π é a bíblica, em que $\pi = 3$ (1 Reis VII: 23)".

Vários autores e professores utilizam o PI como um exemplo de número irracional, porém muitos afirmam que esse fato é devido não conseguirmos enxergar período em suas casas decimais. Mas esse número possui uma infinidade de casas decimais e nem todas são conhecidas, ou seja, um período para PI poderia ter um quantidade muito grande de casas decimais, logo essa afirmação não serve para comprovar que ele é irracional.

Nesse sentido, quanto à irracionalidade do número PI Ávila (2001, P.07) esclarece que:

> O fato de não vermos período nas aproximações de π, por mais que aumentemos essas aproximações, não prova que π seja irracional, pois é concebível que o período tenha milhões, bilhões, trilhões de algarismos - ou mais! Sabemos que π é irracional porque isto pode ser *demonstrado* rigorosamente, assim como se demonstra que a soma dos ângulos de qualquer triângulos é 180º.

Vale lembrar que o número π é definido pela razão entre o comprimento de uma circunferência e seu diâmetro. Porém, o fato de ser uma razão não faz de π um número racional. Para mais detalhes sobre irracionalidade de π o leitor poderá consultar Oliveira (2013).

2.2 Números de ouro

O número de ouro é um número especial por poder ser encontrado na natureza, nas obras de artes, e até mesmo nas pirâmides do Egito construídas ainda anos a. C. Desse modo, se observa a existência deste número há vários séculos, ou seja, foi descoberto a mais de dois mil anos. Lívio (2011, p.13) nos traz os seguintes relatos históricos.

> Menos conhecido que o Pi é outro número, o PHI (Φ), que, em muitos aspectos, é ainda mais fascinante. Suponha que eu lhe pergunte: o que o encantador arranjo de pétalas numa rosa vermelha, o famoso quadro “O Sacramento da Última Ceia”, de Salvador Dalí, as magníficas conchas espirais de moluscos e a procriação de coelhos têm em comum? É difícil de acreditar, mas esses exemplos bem díspares têm em comum certo número, ou proporção geométrica, conhecido desde a Antiguidade, um número que no século XIX recebeu o título honorífico de “Número Áureo”, “Razão Áurea” e “Secção Áurea”. Um livro publicado na Itália no começo do século XVI chegou a chamar essa razão de “Proporção Divina”.

Diversas obras construídas pelos gregos, em tempos antigos, possui familiaridade com a razão áurea. De acordo com Biembengut (1996, p.12):

> Muito dos feitos realizados pelos Gregos, tais como: nas esculturas de Fhideas; nas obras arquitetônicas; no símbolo da escola pitagórica (V a.C.) um pentagrama, na demonstração da beleza do pentagrama, por processos geométricos, feita por Euclides (III a.C.), comprovam a familiaridade a respeito das Secções Áureas.

Alguns pesquisadores, entre eles Belini (2015), mencionam o fato histórico relacionado a Leonardo Fibonacci, um matemático que estudou o crescimento da população de coelhos no ano 1200, no fim da idade média, criador da sequência matemática conhecida até hoje como sequência de Fibonacci. A partir da observação da procriação de dois coelhos por várias gerações chegou a sequência (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...) onde cada termo da sequência é igual à soma dos dois números anteriores, em que os dois primeiros termos são iguais a 1.

Um dos métodos utilizados para se determinar e/ou definir o número de ouro, ou como alguns pesquisadores costumam dizer, se chegar ao valor da razão áurea, é através de alguma construção geométrica, aplicada em uma questão do ENADE 2014 na prova do curso Licenciatura em Matemática. Esse método está descrito abaixo.

> Para construirmos o número de ouro apenas com o auxílio de uma régua não graduada e de um compasso, utiliza-se o seguinte procedimento: dado um seguimento AB qualquer, marca-se um ponto médio; constrói-se um seguimento BC perpendicular a AB e com a metade do comprimento AB; marca-se o ponto E sobre na hipotenusa do triângulo ABC, tal que, $\overline{EC}$ e $\overline{BC}$ sejam iguais; e determina-se o ponto D no seguimento AB tal que $\overline{AD}$ e $\overline{AE}$ sejam iguais. Com esse procedimento, o ponto D estará dividindo o seguimento AB na razão áurea.
> A partir da construção geométrica do número de ouro e considerando x como comprimento do seguimento AB, faça o que se pede nos itens a seguir, apresentando os cálculos utilizados na sua resolução.
> a) Determine o comprimento do seguimento AC em função de x.
> b) Determine o comprimento do seguimento AD em função de x.
> c) Determine o número de ouro dado pelo quociente $\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}}$. (BRASIL, 2014, p. 10)

Seguindo as orientações dessa questão, chaga-se à razão áurea ou proporção Divina, ou seja, ao número de ouro. Para isso, será apresentada abaixo a resolução da questão.

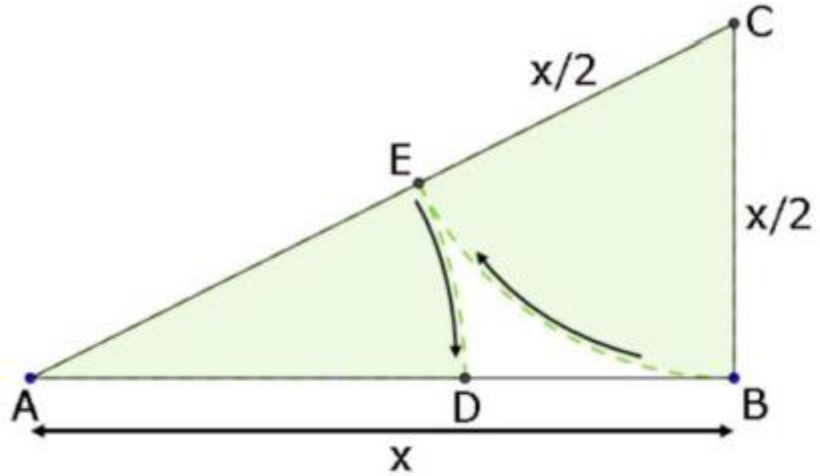

Figura 2: Representação da construção geométrica do número de ouro
Fonte: Brasil (2014).

Para o item a), observando na figura 3 que o triângulo ABC será retângulo com hipotenusa igual a *AC*, pelo teorema de Pitágoras:

$$(AC)^2 = x^2 + (\frac{x}{2})^2$$

$$(AC)^2 = \frac{(5x^2)}{4}$$

$$AC = \frac{x\sqrt{5}}{2}$$

Para o item b), observa-se no enunciado da questão e na figura 3 que os segmentos AD e AE são iguais e que $EC = BC = \frac{x}{2}$, calculando AD em função de x, tem-se

$$AD = AE = AC - EC = \frac{x\sqrt{5}}{2} - \frac{x}{2}, \text{ assim}$$

$$\text{AD} = \frac{x(\sqrt{5}-1)}{2}$$

E por fim, para responder ao item c), ou seja, encontrar o quociente $\frac{AB}{AD}$ encontrando, assim, o número áureo tem-se:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{x}{\frac{x(\sqrt{5}-1)}{2}}$$

$$\frac{AB}{AD} = \frac{2x}{x(\sqrt{5}-1)} = \frac{2}{\sqrt{5}-1}$$

Racionalizando, temos:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

Ou seja, $\phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ é o número de ouro.

Outra maneira de efetuarmos o cálculo do valor de Φ é a seguinte: utilizando sequência de Fibonacci $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots)$ se cria uma nova sequência em que cada termo é a razão entre um termo da sequência de Fibonacci e seu antecessor, isto é, a sequência:

$$\left(1 = \frac{1}{1}, 2 = \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}, \ldots\right)$$

Efetuando temos as razões:

$$\frac{1}{1} = 1, \qquad \frac{2}{1} = 2, \qquad \frac{3}{2} = 1.5, \qquad \frac{5}{3} = 1.666, \qquad \frac{8}{5} = 1.6, \qquad \frac{13}{8} = 1{,}625, \ldots$$

Prosseguindo assim, aproxima-se mais até chegar próximo número Φ que é o limite dessa última sequência obtida através da razão dos termos de Fibonacci.

Vejamos os termos apresentados acima e mais alguns na tabela 2, para aproximar e:

Tabela 2 – Cálculo de aproximações para o número de ouro (ϕ)

N	Termos de Fibonacci (x_n)	$\frac{x_{n+1}}{x_n} \approx \phi$
1	1	$\frac{1}{1} = 1$
2	1	$\frac{2}{1} = 2$
3	2	$\frac{3}{2} = 1{,}5$
4	3	$\frac{5}{3} = 1{,}666\ldots$
5	5	$\frac{8}{5} = 1{,}6$
6	8	$\frac{13}{8} = 1{,}625$
7	13	$\frac{21}{13} \cong 1{,}615384$
8	21	$\frac{34}{21} \cong 1{,}619047$
9	34	$\frac{55}{34} \cong 1{,}617647$
10	55	$\frac{89}{55} = 1{,}61818\ldots$
20	6765	$\frac{10946}{6765} = 1{,}61803399\ldots$

Fonte: Elaborado pelo autor.

Dando continuação aos cálculos da tabela acima obtêm-se cada vez mais casas decimais exatas para o número de ouro. Deste modo, perante a exposição, o número de ouro com sete casas decimais após a vírgula é $\Phi \cong 1{,}6180339$.

2.3 – Número de Euler

Além do PI e do número de ouro, temos outro número importante, aplicado diversas vezes durante o curso Licenciatura em Matemática, o número de Euler, que é denotado por *e*.

Regularmente o número e está contido nos cálculos Integral e Diferencial, porém, Maor (2008, p.9) diz algo relevante a esse respeito:

> O número e era conhecido pelos matemáticos pelo menos meio século antes da invenção do cálculo (ele já é mencionado na tradução inglesa de Edward Wright do trabalho de John Napier sobre logaritmos, publicado em 1618). Como foi isso possível? Uma explicação virtual é a de que o número e teria aparecido primeiro ligado a uma fórmula para o cálculo de juros compostos.

Por outro lado, o número de Euler surge diversas vezes na Matemática como limite de uma sequência isto é: $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$. Devemos ressaltar ainda que existam relatos históricos de que o número e tenha surgido antes mesmo de existir os cálculos Diferencial e Integral. De acordo com, Maor (2008, p. 9).

> Alguém não se sabe quem ou quando − deve ter notado o fato curioso de que se um capital Pé composto n vezes por ano, durante t anos, a uma taxa anual de juros r e se permitirmos que n aumente sem limites, a soma de dinheiro S, obtida a partir da fórmula $(1+\frac{r}{n})^{nt}$, parece aproximar-se de um certo limite. O limite, para $p = 1, r = 1$ e $t = 1$ é aproximadamente 2,718.

Mesmo Maor não sabendo dizer com precisão o tempo em que o estudioso em questão fez esta descoberta, em seu livro “A história de um número” está bem claro que pode ter ocorrido à descoberta deste número meio século antes de existir os cálculos.

Deve-se levar em consideração um fato histórico interessante, o conhecimento desse número mesmo antes da invenção dos logaritmos, apesar de não haver ainda naquela época uma notação para padronizar, veja o que nos diz Boyer (1996, p. 305).

> De 1727 a 1783 a pena de Euler esteve ocupada aumentando os conhecimentos disponíveis em quase todos os ramos da matemática pura e aplicada, dos mais elementares aos mais avançados. Além disso, em quase tudo, Euler escrevia na linguagem e notação que usamos hoje, pois nenhum outro individuo foi tão grandemente responsável pela forma matemática de nível universitário de hoje quanto Euler, o construtor da notação mais bem-sucedida em todos os tempos. Quando chegou a Rússia em 1727 ele havia estado ocupado com, experiência sobre disparo de canhões em uma exposição manuscrita de seus resultados, escrita provavelmente em 1727 ou 1728, Euler usava a letra e mais de uma dúzia de vezes para representar a base do sistema de logaritmos naturais. O conceito por traz desse número era bem conhecido desde a invenção dos logaritmos, mais de um século antes; no entanto nenhuma notação padronizada para ele se tornara comum. Numa carta a Goldbach em 1731 Euler novamente usou a lera e para “aquele número cujo logaritmo hiperbólico = 1”; apareceu impresso pela primeira vez na *Mechanica* de Euler em 1736, livro em que a dinâmica de Newton é apresentada pela primeira vez em forma analítica. Essa notação, sugerida talvez pela primeira letra da palavra “exponencial” logo tornou-se padrão.

Diante do exposto pode-se observar a utilização da letra e por Euler diversas vezes na representação da base do sistema dos logaritmos naturais.

Para aproximar o valor do número de Euler escolheu-se a sequência de números reais$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, que pode ser reescrita na forma $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$, sendo assim basta substituir alguns valores para n, de acordo com a tabela 3:

Tabela 3 – Cálculo de e

N	$(1+\frac{1}{n})^n \approx e$
1	2
5	2,48832
10	2,59374246
25	2,665836
50	2,691588
100	2,704814
100000	2,718268

Fonte: Elaborado pelo autor.

De acordo a tabela acima, no momento em que $n = 100000$, obteve-se a aproximação $e \cong 2{,}7182$ com 4 casas decimais exatas. Como o propósito conseguir uma aproximação de e com mais casas decimais exatas basta aumentar sucessivamente o valor de n. Para a construção da tabela acima, foi utilizado novamente o programa Excel.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

No presente trabalho apresentou-se de forma sucinta os conjuntos numéricos e as sequências e series dos números reais priorizando os números irracionais a fim de facilitar o entendimento do trabalho. Em seguida, apresentou-se, de forma coesa o objetivo geral, que foi apresentar os principais fatores históricos e as definições e propriedades relacionadas aos números irracionais π, Φ e e, trazendo um pouco da história de como esses números irracionais surgiram na Matemática e também a definição e uma aproximação numérica para cada um deles.

Sendo assim, o trabalho em questão torna-se relevante, uma vez que, através dele é possível observar-se que os conhecimentos matemáticos não surgiram do mero acaso, mas sim depois de muito empenho, trabalho e estudos de diversos matemáticos.

É importante ressaltar que, assim como foi dito no decorrer do trabalho, que os três números em questão são números irracionais, uma vez que não são números com casas decimais exatas ou periódicas, ou seja, não podem ser escrito como uma razão entre dois números inteiros. Sendo assim, são possíveis e interessantes novas pesquisas investigando esse fato e mostrando matematicamente a irracionalidade desses números, uma vez que tais demonstrações extrapolam o objetivo deste trabalho.

É interessante salientar, que existem, atualmente, diversas formas para o cálculo de aproximações dos números em questão, mas com os métodos mostrados nesse trabalho obteve-se as seguintes aproximações: $\pi \cong 3{,}141$, $\phi \cong 1{,}6180339$ e $e = 2{,}7282$.

Muitas vezes os números investigados nesse trabalho são apresentados simplesmente como números irracionais sem nenhuma contextualização histórica ou conceitualização. Nesse sentido, o presente trabalho se torna importante, uma vez que apresenta várias citações e fatos históricos relacionados a esses números.

Portanto, pode-se concluir que o presente trabalho alcançou seus objetivos respondendo o seguinte questionamento, *quais os fatores históricos e as possíveis definições e propriedades relacionadas aos números irracionais π, Φ e e?* Uma vez que, com relação ao PI, foi apresentado citações de que ele já era conhecido pela humanidade antes mesmo de Cristo. Já em relação ao número de ouro, apresentou-se sua interessante relação com a natureza, e também, que o mesmo já aparecia em obras Gregas no século V a.C. E por fim, com respeito ao número de Euler, foi possível observar através dessa pesquisa que o mesmo, apesar de não ser tão antigo quanto os outros, já era utilizado por Euler em suas pesquisas por volta de 1736.

REFERÊNCIAS

ASSIS, A. K. T. **Arquimedes, o Centro de Gravidade e a Lei da Alavanca.** 1ª ed. Montreal, Quebec H2W 2B2 Canada, 2008. Disponível em<https://s3.amazonaws.com/academia.edu.documents/33109593/Arquimedes.pdf?AWSAccessKeyId=AKIAIWOWYYGZ2Y53UL3A&Expires=1513230756&Signature=%2BQ0vyOETzh1kHMniXT0pP3z%2F5pY%3D&response-content-disposition=inline%3B%20filename%3DArquimedes.pdf> acessado em 14/12/2017.

AVILA, G. S. S. **Análise matemática para licenciatura.** 3ª ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2006.

BASTOS, W. D.; SILVA, A. F. **A área do círculo**. Revista do Professor de Matemática. v. 40, n. 40, p. 46-48. 1999.

BELINI. M. M. **A razão áurea e a sequência de Fibonacci.** USP. São Carlos, 2015. Disponível em <http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/55/55136/tde-06012016-161056/es.php>acesso em 08/12/2017.

BIEMBENGUT, M. S. **Número de Ouro e Secção Áurea**. Considerações e Sugestões para a Sala de Aula. Blumenau, SP. FURB, 1996.

BRASIL. **Matemática Licenciatura**. Ministério da Educação INEP. ENADE. 2014.

BOYER, C.B. **História da Matemática.** 2º ed. São Poulo: Edgard Blucher, 1996.

CONTADOR, P. R. M. **A matemática na arte e na vida**. 2ª ed. rev. São Paulo: Livraria da Física, 2011.

DUTRA, A.V.; ARAUJO, M. C. A.; VIEIRA, C. S. **UM POUCO DA HISTÓRIA E CURIOSIDADES DOS NÚMEROS:** PI; NÚMERO DE OURO E NÚMERO DE EULER. Ji-Paraná, Rondônia: UNIR, 2017. Disponível em<https://sites.google.com/a/unir.br/semates-unir/home/anais>acesso em 15/11/2017.

ELI, M. **A História de um número.** Tradução: de Jorge Calife. 5ª ed. Rio de Janeiro: Record, 2008.

EVES, H. **Introdução a história da matemática.** Campinas, São Paulo: Unicamp, 2004.

FERRER, J.V. **O número de ouro na arte, arquitetura e natureza:** beleza e harmonia**.** Disponível em <http://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/midias_digitais_II/modulo_IV/numero_de_ouro.pdf>acesso em 28/05/2017.

GAIO, R.; CARVALHO, R.B.; SIMÕES, R. **Métodos e técnicas de pesquisa: a metodologia em questão.** In: GAIO, R. (org.). Metodologia de pesquisa e produção de conhecimento. Petrópolis, Vozes, 2008.

GYORGY, D; **O poder dos limites:** harmonia e proporções na natureza, arte e arquitetura, 1986. Disponível em <https://chrisogg.files.wordpress.com/2012/03/phi.pdf>acesso em 30/11/2017.

GIL, A.C. **Métodos e Técnicas de Pesquisa Social**. 6ª ed. São Paulo: Atlas, 2008.

GUZZO. S. M. **O número PI.** Revista eletrônica de matemática. N. 2. Remat 2010. Disponível em<http://matematicajatai.com/rematFiles/2-2010/pi.pdf>acesso em 28/04/217.

HUNTLEY, H. E. **A divina proporção.** Tradução de Luis Carlos Ascêncio Nunes. Brasília: Universidade de Brasília, 1985.

IEZZI, G.. **Fundamentos de Matemática Elementar**. Vol. 1 – Conjuntos / Funções. 9ª edição. São Paulo: Atual, 2013.

LEITHOLD, L. **O calcúlo com geometria analitica.** Tradução: Ciro de Carvalho Patorra. – 3ª ed. São Paulo: Harbra, 1994.

LÍVIO, M. **Razão Áurea: a história de Fi, um número surpreendente.**
Tradução: Marco Shinobu Matsumura. – 6ª ed. Rio de Janeiro: Record, 2011.

LIMA. E. L. **Função de uma variável.** 10.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2008.

MAOR. E. **A história de um número/Eli Maor.** Tradução de Jorge. 5ª ed. Rio de Janeiro: Record, 2008.

MINAYO, M.C.S. **O desafio do conhecimento:** pesquisa qualitativa em saúde. 11ª ed. São Paulo, HUCITEC, 2008.

MURAKAMI, G. I. C. **Fundamentos da matemática elementar:** conjuntos e funções. 3ª ed. São Paulo, Atual, 1977.

OLIVEIRA, J. M. **"A Irracionalidade e Transcendência do Número π".** Rio Claro: UNESP, 2013.

QUINA, C. M. **Sequências e séries**: uma proposta duvaliana para a Educação Básica. São Paulo 2015. Disponível em< http://www.teses.usp.br/index.php?option=com_jumi&fileid=20&Itemid=96&lang=pt-br&cx=011662445380875560067%3Acack5lsxley&cof=FORID%3A11&hl=pt-br&q=sequencias+e+series&siteurl=www.teses.usp.br%2Findex.php%3Foption%3Dcom_jumi%26fileid%3D20%26Itemid%3D96%26lang%3Dpt-

br&ref=www.teses.usp.br%2Findex.php%3Foption%3Dcom_jumi%26fileid%3D28%26Itemid%3D119%26lang%3Dpt-br&ss=7287j4128831j21>acesso em 14/11/17.

ROQUE, T. **História da matemática:** uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. 1ª ed. Rio de Janeiro, Zahar, 2012. Disponível em< https://www.passeidireto.com/arquivo/5827786/historia-da-matematica---tatiana-roque> acesso em 07/12/2017.

STRUIK, D. J. **História concisa da matemática.** Tradução de Guerreiro. 3ª ed. Gradiva, 1997.

VASCONCELOS, G. de A. **A Irracionalidade e Transcendência do Número *e*.** Rio Claro, São Paulo 2013.